



TITLE:

等焦部分多様体を初期データにも
つ平均曲率流 (部分多様体論とその
周辺領域における新たな研究対象)

AUTHOR(S):

小池, 直之

CITATION:

小池, 直之. 等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流 (部分多様体論とその周辺領域における新たな研究対象). 数理解析研究所講究録 2009, 1668: 53-79

ISSUE DATE:

2009-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141115>

RIGHT:

等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流

(The mean curvature flow for equifocal submanifolds)

東京理科大学・理学部 小池 直之 (Naoyuki Koike)

Faculty of Science, Tokyo University of Science

§1. 序

Liu-Terng([LT]) はユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体を初期データにもつ平均曲率流に関して次の事実を得た。

事実 1([LT]) M をユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体とすると、次の事実が成り立つ。

(i) M を初期データにもつ平均曲率流 M_t は有限時間でそのあるフォーカル部分多様体 F に崩壊し、もし M から F への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 M_t は type I singularity をもつ。

(ii) M の任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 M の平行部分多様体 M' で M' を初期データにもつ平均曲率流 M'_t が有限時間で F に崩壊するようなものが存在する。

また、Liu-Terng([LT]) は次の事実を得た。

事実 2([LT]) M をユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体とし、 $\tilde{C}(\subset T_{x_0}^\perp M)$ を M の点 x_0 における Weyl 群の x_0 を含む基本領域とし、 $C := \exp^\perp(\tilde{C})(:= x_0 + \tilde{C})$ とする。ここで、 \exp^\perp は M の法指数写像を表す。 σ を ∂C (これは単体複体) の 1 次元以上の単体とすると、次の事実が成り立つ。

(i) $\overset{\circ}{\sigma}$ を通る (M の) 任意のフォーカル部分多様体 F を初期データにもつ平均曲率流 F_t は $\partial\sigma$ を通る (M の) あるフォーカル部分多様体 F' に有限時間 (これを T と表す) で崩壊し、もし F から F' への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 F_t は type I singularity をもつ。

(ii) $\partial\sigma$ を通る (M の) 任意のフォーカル部分多様体 F に対し、 $\overset{\circ}{\sigma}$ を通る (M の) フォーカル部分多様体 F' で F' を初期データにもつ平均曲率流 F'_t が有限時間で F に崩壊するようなものが存在する。

事実 1, 2 の (i) によれば、ユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体は、平均曲率流に沿う崩壊を有限回繰り返した後、1 点に崩壊することがわかる。

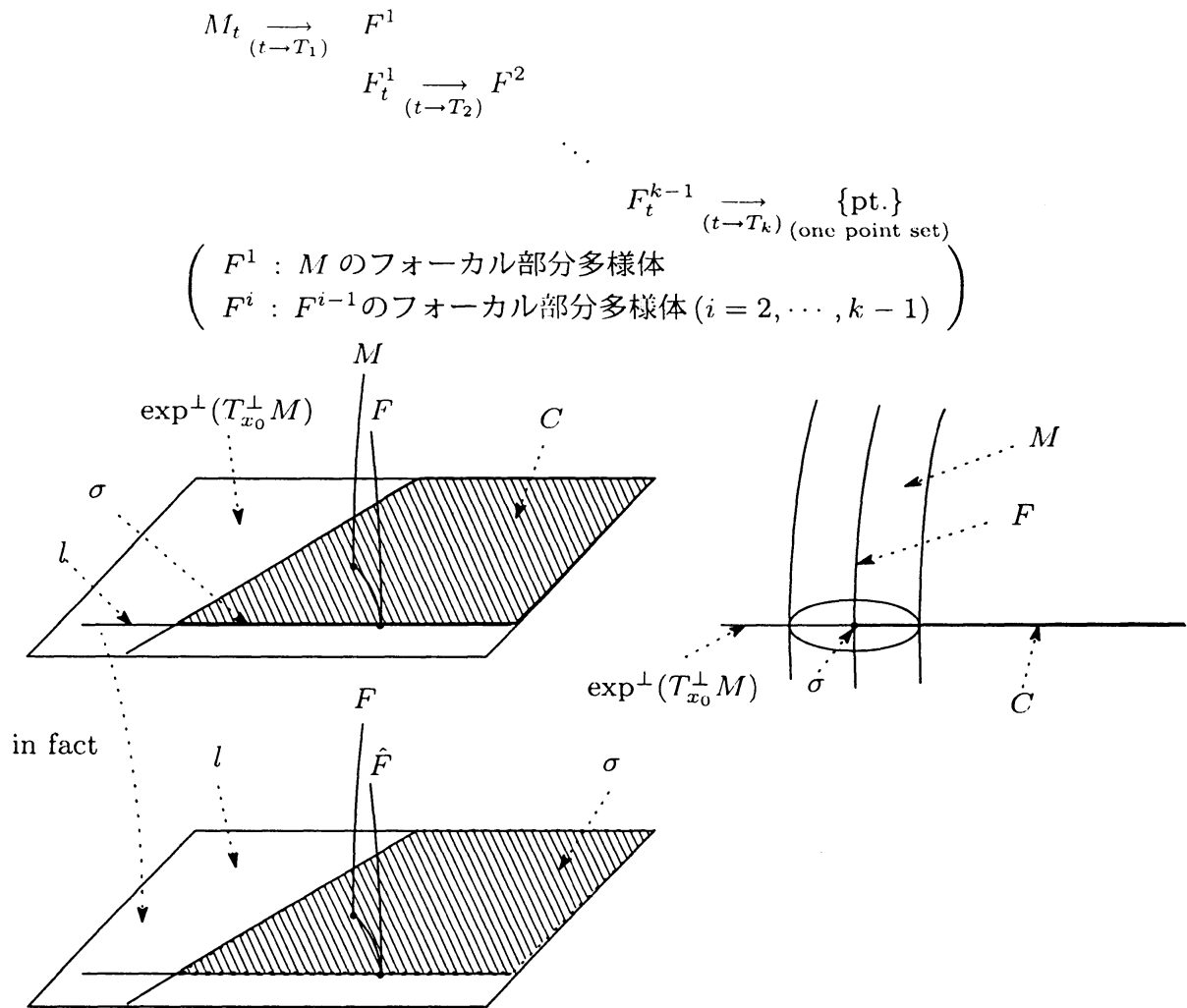


図 1

1995 年、Terng-Thorbergsson([TT]) は、ユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体、球面内の等径超曲面および双曲空間内のコンパクト等径超曲面の一般概念として、対称空間内で等焦部分多様体という概念を定義した。今回、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流に関して、上述の事実 1 および 2 に類似した次の結果を得た。

定理 A([Koi5]) M をコンパクト型対称空間 G/K 内の等焦部分多様体とするとき、次の事実が成り立つ。

(i) もし M が極小でないならば、 M を初期データにもつ平均曲率流 M_t は有限時間でそのあるフォーカル部分多様体 F に崩壊する。さらに、もし M が既約でその余次元が 2 以上であり、 M から F への fibration が spherical であるならば、平均曲率流 M_t は type I singularity をもつ。

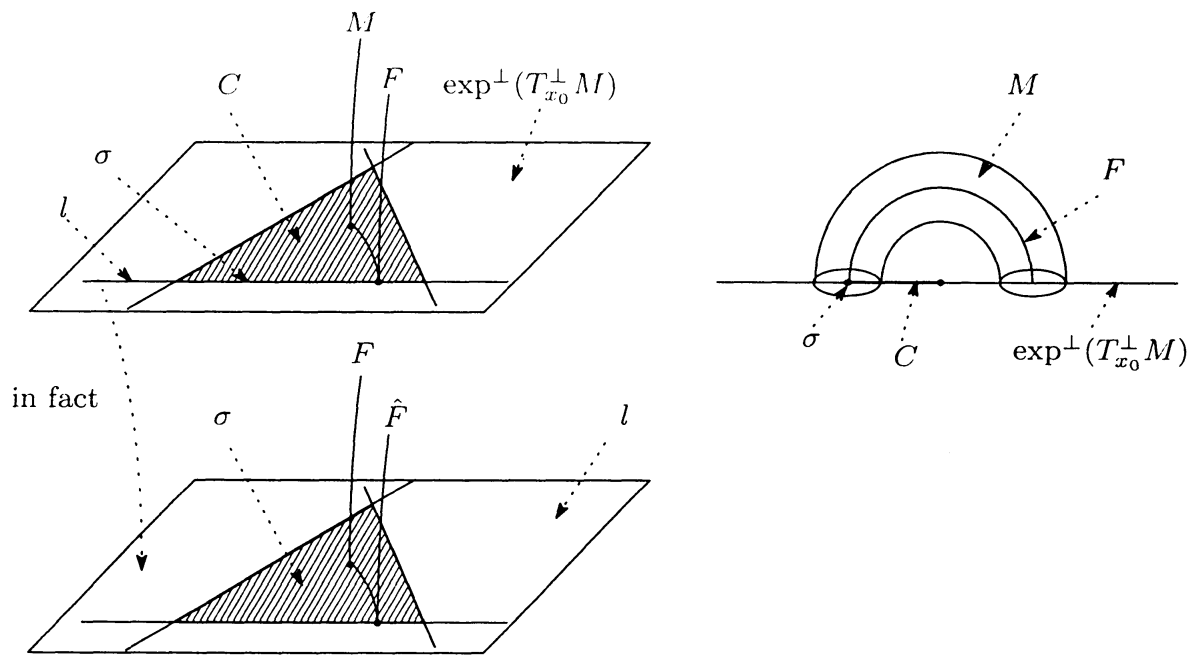


図 2

注意 コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体 M の各平行部分多様体 (これらも等焦部分多様体である) は C と 1 点で交わる。 M の平行部分多様体で極小なものはただ 1 つ存在することが示される (定理 A の証明参照)。また、 M の各フォーカル部分多様体は ∂C と 1 点で交わる。 ∂C の各 stratum σ に対し、 σ° を通る M のフォーカル部分多様体で極小なものはただ 1 つ存在することが示される (定理 B の証明参照)。

§2. 平均曲率流とリッチ流

この節において、平均曲率流およびリッチ流の定義を述べ、それらの短時間における存在性と一意性について説明する。はじめに、ベクトルバンドルの切断に関する発展方程式の解の短時間における存在性と一意性に関する R. S. Hamilton の定理を紹介する。 V をコンパクト多様体 M 上の (C^∞) ベクトルバンドル、 $\Gamma(V)$ を V の (C^∞) 切断の全体、 $E(\cdot: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V))$ を階数 2 の非線形微分作用素、 $DE_f(\cdot: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V))$ を E の $f(\in \Gamma(V))$ における線形化とする。以下、 \tilde{f} は、 $M \times [0, T)$ から V への C^∞ 写像で各 $t(\in [0, T))$ に対し $f_t(\stackrel{\text{def}}{=} f_t(\cdot) := \tilde{f}(\cdot, t))$ が V の切断になるようなものとする。

定理 2.1([Ha]).

E が次の 3 条件を満たす写像 $L : \Gamma(V) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$ を許すとする :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet L : \text{各成分に関して 1 階の微分作用素} \\ \bullet L \circ (\text{id}_{\Gamma(V)} \times E) \circ \Delta_{\Gamma(V)} : \text{1 階の微分作用素} \\ \bullet \forall f \in \Gamma(V), \\ \quad \sigma(DE_f)|_{N(\sigma(L)) \times N(\sigma(L))} \text{の各固有値の実部は正} \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{l} W : \text{あるベクトルバンドル, } \Delta_{\Gamma(V)} : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V) \times \Gamma(V) : \text{対角写像,} \\ \text{id}_{\Gamma(V)} : \Gamma(V) \text{の恒等変換, } \sigma(\cdot) : (\cdot) \text{の表象, } N(\sigma(L)) : \sigma(L) \text{の nullity space} \end{array} \right)$$

このとき、各 $f \in \Gamma(V)$ に対し、発展方程式 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = E(f_t)$ の解 \tilde{f} で初期条件 $\tilde{f}(\cdot, 0) = f$ を満たすようなものが短時間において一意的存在する。

f をコンパクト多様体 M からリーマン多様体 (N, \tilde{g}) への (C^∞) はめ込みとし、 $\tilde{f} : M \times [0, T) \rightarrow N$ を、各 $t \in [0, T)$ に対し $f_t : M \rightarrow N$ ($\stackrel{\text{def}}{=} f_t(x) := \tilde{f}(x, t)$) がはめ込みになり、 $f_0 = f$ となるような C^∞ 写像とする。 g_t を \tilde{g} から f_t によって誘導される計量とし、 H_t を等長はめ込み $f_t : (M_t, g_t) \hookrightarrow (N, \tilde{g})$ の平均曲率ベクトルとする。

定義 2.1. \tilde{f} が発展方程式

$$\tilde{f}_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(x,t)} \right) = (H_t)_x \quad ((x, t) \in M \times [0, T)) \quad \cdots \quad (\text{MCF})$$

を満たすとき、 \tilde{f} (あるいは、 f_t ($0 \leq t < T$)) を、 f を初期データにもつ平均曲率流とよぶ。

f_t は、局所的に自明なベクトルバンドル $M \times \mathbb{R}^m$ ($m := \dim N$) の切断とみなすことができ、定理 2.1 の 3 条件を満たすような写像 L を許すような $M \times \mathbb{R}^m$ のある 2 階の非線形微分作用素 E に対し、 $E(f_t) = H_t$ が成り立つ。それゆえ、定理 2.1 を用いて、各はめ込み f に対して、それを初期データにもつ平均曲率流が短時間で一意的存在することが示される。

注意 (i) $(N, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{m+1}, \tilde{g}_0)$ (ユークリッド空間) のとき、(MCF) は次のように書き換えられる:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \Delta_t f_t$$

ここで、 Δ_t は $f_t^* \tilde{g}_0$ に関するラプラシアンを表す。

(ii) f_t ($0 \leq t < T$) が埋め込みであるとき、 $f_t(M)$ を M_t と表し、 M_t ($0 \leq t < T$) を M_0 を初期データにもつ平均曲率流とよぶ。

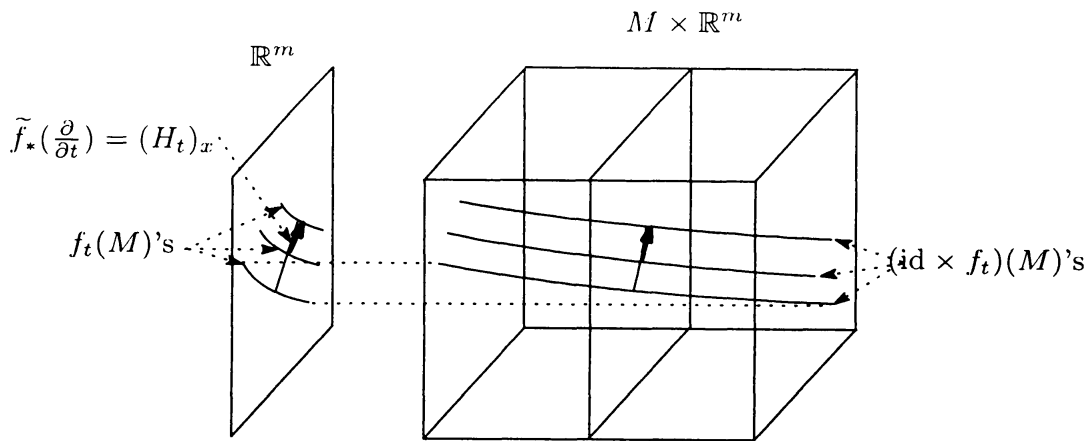


図 3

次に、リッチ流の定義を述べることにする。 g をコンパクト多様体 M のリーマン計量とし、 $G : M \times [0, T) \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ ($T = \infty$ の可能性あり) を各 $t \in [0, T)$ に対し、 $g_t : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ ($\stackrel{\text{def}}{=} g_t(x) := G(x, t)$ ($x \in M$)) が M のリーマン計量になり、 $g_0 = g$ となるような C^∞ 写像とし、 Ric_t を g_t のリッチテンソルとする。

定義 2.2. G が発展方程式

$$G_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(x,t)}) = -2(\text{Ric}_t)_x \quad ((x, t) \in M \times [0, T)) \quad \cdots \quad (\text{RF})$$

を満たすとき、 G (あるいは、 g_t ($0 \leq t < T$)) を、 g を初期データにもつリッチ流とよぶ。

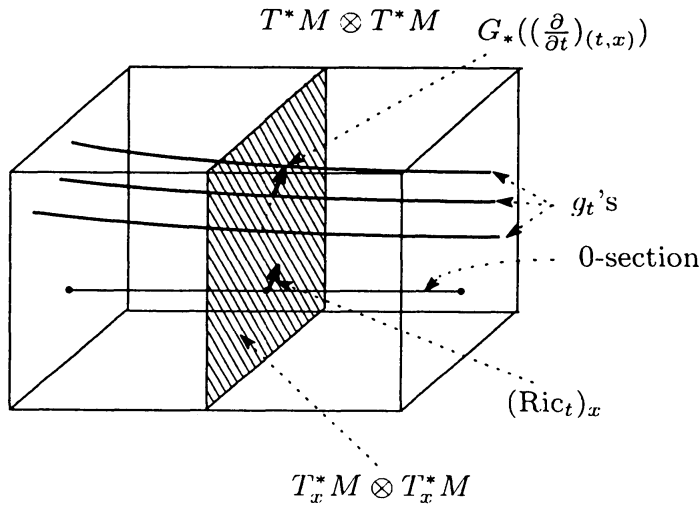


図 4

定理 2.1 の 3 条件を満たすような写像 L を許すような $T^*M \otimes T^*M$ のある 2 階の非線形微分作用素 E に対し、 $E(g_t) = -2\text{Ric}_t$ が成り立つ。それゆえ、定理 2.1 を用いて、各リーマン計量 g に対して、それを初期データにもつリッチ流が短時間で一意的存在することが示さ

れる。

平均曲率流に関しては、G. Huisken([Hu1]) による次の結果が顕著である。

定理 2.2([Hu1]). f を m 次元コンパクト多様体 M から $(m+1)$ 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^{m+1}, \tilde{g}_0)$ への strictly convex 超曲面はめ込み (つまり、すべての主曲率が正であるようなはめ込み) とし、 f_t ($0 \leq t < T$) を f を初期データにもつ平均曲率流とする。このとき、次の主張 (i), (ii) が成り立つ。

(i) 各 f_t ($0 \leq t < T$) も strictly convex 超曲面はめ込みであり、 $\lim_{t \rightarrow T-0} f_t(M)$ は 1 点 (これを O と表す) であり、type I singularity をもつ (つまり、 $\lim_{t \rightarrow T-0} \max_{x \in M} \|A_x^t\|_\infty^2 (T-t) < \infty$)。ここで、 A^t は f_t の形作用素を表す。

(ii) $\bar{f}_t (: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1})$ を $\overrightarrow{O\bar{f}_t(x)} = \rho(t)\overrightarrow{Of_t(x)}$ によって定義する。ただし、 ρ は、 $\rho > 0$, $\rho(0) = 1$, $\text{Vol}((M, \bar{f}_t^* \tilde{g}_0)) = \text{Vol}((M, f^* \tilde{g}_0))$ ($\forall t \in [0, T)$) を満たす $[0, T)$ 上の C^∞ 関数を表す。このとき、 $\lim_{t \rightarrow T-0} \bar{f}_t$ は全臍的超曲面はめ込み (つまり、 $\lim_{t \rightarrow T-0} \bar{f}_t(M)$ は超球面) になる。

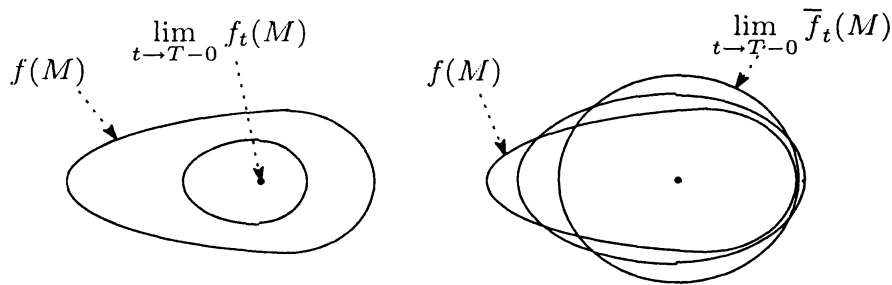


図 5

実は、この結果は、「正のリッチ曲率をもつリーマン計量を発するリッチ流を体積を保つようにタイムリーにスケールリングして得られる流れの極限計量が定曲率計量になる」という 1982 年に R.S. Hamilton([Ha]) によって示された結果の類似物であることを注意しておく。

§3. 等焦部分多様体と無限次元等径部分多様体

この節において、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体、および、可分な無限次元ヒルベルト空間内の等径部分多様体の定義を述べ、parallel transport 写像とよばれるリーマン沈め込みを通じて等焦部分多様体の研究がヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元できることを説明する。1995 年、Tereng-Thorbergsson([TT]) はコンパクト型対称空間 G/K 内で等焦部分多様体という概念を次の 4 条件を満たすコンパクト部分多様体 M として定義した:

(E-i) M の法ホロノミー群は自明である。

(E-ii) M の各平行単位法ベクトル場 v に対し、法測地線 γ_{v_x} ($\dot{\gamma}_{v_x}(0) = v_x$) に沿うフォーカル半径族は (重複度を込めて) M の点 x のとり方によらない。

(E-iii) M の各点 x に対し、 x を通る固有に埋め込まれた完備連結部分多様体 Σ_x で M のすべての平行部分多様体と直交的に交わるようなものが存在する。

(E-iv) Σ_x 上の誘導計量は平坦である。

(E-iii) における Σ_x は M の x を通る切断とよばれ、全測地的部分多様体になることが示される。 G/K が球面の場合、条件 (E-iv) より $\text{codim } M = 1$ でなければならない。また、その場合、条件 (E-ii) は次の条件 (E-ii') と同値である：

(E-ii') M の各平行単位法ベクトル場 v に対し、 v_x に対する主曲率族は (重複度を込めて) M の点 x のとり方によらない。

それゆえ、球面内の等焦部分多様体は等径超曲面を意味する。また、 G/K が複素射影空間で M が Hopf 超曲面 (つまり、curvature-adapted 超曲面) の場合、条件 (E-ii) は条件 (E-ii') と同値であることを注意しておく。

次に、コンパクト半単純リー群に対する parallel transport 写像の概念の定義を述べることにする。 G をコンパクト半単純リー群とし、 \mathfrak{g} を G のリー代数とする。 \langle, \rangle を \mathfrak{g} の $\text{Ad}(G)$ 不変な内積 B から定まる G の両側不変なリーマン計量とする。自明な G -バンドル $[0, 1] \times G$ の H^0 接続の空間 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ (これは B から定まる L^2 内積に関して可分な無限次元ヒルベルト空間になる) から G への写像 ϕ を次のように定義する。

$$\phi(u) := g_u(1) \quad (u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})) \quad \left(\begin{array}{l} g_u : g_u(0) = e \text{ および } g_{u*}^{-1} g'_u = u \text{ を満たす} \\ H^1([0, 1], G) \text{ の要素} \end{array} \right)$$

ここで、 e は G の単位元、 g'_u は g_u の弱微分、 $g_{u*}^{-1} g'_u$ は $(g_{u*}^{-1} g'_u)(t) = L_{g_u(t)*}^{-1}(g'_u(t))$ ($t \in [0, 1]$) によって定義される $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の要素を表す。 ϕ はリーマン沈めこみになり、 G に対する parallel transport 写像とよばれる。 $\pi : G \rightarrow G/K$ を自然な射影とする。必要ならば B を取り直すことにより、 π はリーマン沈めこみであるとしてよい。

定理 3.1([TT]) M を G/K 内のコンパクト部分多様体とすると、 M が等焦部分多様体であることと $(\pi \circ \phi)^{-1}(M)$ の各連結成分が $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ 内の等径部分多様体であることは同値である。

ここで、可分な無限次元ヒルベルト空間内の等径部分多様体とは以下のように定義される。 V を (可分な) ヒルベルト空間とし、 M を V 内の proper Fredholm 部分多様体 (つまり、" M は固有に埋め込まれている" & " $\text{codim } M < \infty$ " & " $\forall v \in T^\perp M$, A_v : コンパクト作用素 ($A : M$ の形テンソル)") とする。1989 年、Terng([T2]) は、 M が次の条件 (I-i), (I-ii) を満たすとき M を等径部分多様体とよんだ：

(I-i) M の法ホロノミー群は自明である。

(I-ii) M の各平行単位法ベクトル v に対し、 $\text{Spec } A_{v_x}$ は $x \in M$ によらず一定である。

M を等径部分多様体とし、その 1 点 x_0 を固定する。形作用素 A_v ($v \in T_{x_0}^\perp M$) らは可換なので、それらは正規直交基底によって同時対角化可能である。 A_v ($v \in T_x^\perp M$) らの同時固有

空間分解を $T_{x_0}M = \overline{E_0^{x_0} \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} E_i^{x_0} \right)}$ ($E_0^{x_0} := \bigcap_{v \in T_{x_0}^\perp M} \text{Ker } A_v$) とし、 $\lambda_i^{x_0}$ ($i \in I$) を $A_v|_{E_i^{x_0}} = \lambda_i^{x_0}(v)\text{id}$ ($v \in T_{x_0}^\perp M$) によって定義される $T_{x_0}^\perp M$ 上の線形関数とする。ここで、 id は $E_i^{x_0}$ の恒等変換を表す。 λ_i を $\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{x_0}$ を満たす $(T^\perp M)^*$ の平行切断とする。以下、 $\lambda_i(x_0)$ を $(\lambda_i)_{x_0}$ と表す。このとき、 M の各点 x に対し、 $T_x M$ の分解 $T_x M = \overline{E_0^x \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} E_i^x \right)}$ で、 $A_v|_{E_i^x} = (\lambda_i)_x(v)\text{id}$ ($v \in T_x^\perp M$) となるものが存在する。 λ_i ($i \in I$) らは M の主曲率と呼ばれ、 M の各点 x に対して E_i^x を対応させることによって定義される M 上の接分布を E_i と表す。 E_i は λ_i に対する主曲率分布と呼ばれる。 E_i は有限次元かつ積分可能でその各葉は球面になる。この葉は λ_i に対する主曲率球面とよばれる。また、 M の平行法ベクトル場 n_i ($i \in I$) を $\lambda_i(\cdot) = \langle n_i, \cdot \rangle$ によって定義する。 n_i ($i \in I$) らを M の主曲率法ベクトル場と呼ぶ。

一方、2006 年、Heintze-Liu-Olmos([HLO]) は V 内の proper Fredholm 部分多様体 M で上述の条件 (I-i) と次の条件 (I'-ii) を満たすものを等径部分多様体とよんだ：

(I'-ii) M は正則化可能 (つまり、 M の各法ベクトル場 v に対し、形作用素 A_v の正則化されたトレース $\text{Tr}_r A_v$ と $\text{Tr}(A_v^2)$ が存在する) で M の十分近くの平行部分多様体 \tilde{M} が放射方向に関して CMC である。

ここで、正則化されたトレース $\text{Tr}_r A_v$ は次式によって定義される：

$$\text{Tr}_r A_v := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$(\text{Spec } A_v = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\})$$

この等径部分多様体の概念は前述の Terng によって定義されたものと一致することが示される ([HLO] 参照)。

§4. 正則化可能な proper Fredholm 部分多様体を初期データにもつ平均曲率流

M を無限次元ヒルベルト多様体、 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を可分な無限次元ヒルベルト空間とし、 $f : M \hookrightarrow V$ を正則化可能な proper Fredholm 部分多様体はめ込みとする。 $\tilde{f} : M \times [0, T) \rightarrow V$ を、各 $f_t : M \rightarrow V$ ($\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f_t(x) := \tilde{f}(x, t)$ ($x \in M$)) が正則化可能な proper Fredholm 部分多様体はめ込みになり、かつ、 $f_0 = f$ となるような C^∞ 写像とする。 g_t を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から f_t によって誘導される計量とし、 H_t を $f_t : (M_t, g_t) \hookrightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の正則化された平均曲率ベクトルとする。

定義 4.1. \tilde{f} が発展方程式

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(x, t) = (H_t)_x \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

を満たすとき、 \tilde{f} (あるいは、 f_t ($0 \leq t < T$)) を、 f を初期データにもつ平均曲率流とよぶ。

一般に、正則化可能な proper Fredholm 部分多様体はめ込み f に対し、 f を初期データにもつ平均曲率流は短時間で一意に存在するかどうか分からない。しかしながら、次の事実が

成り立つ。

定理 4.1. G/K をコンパクト型対称空間, $\phi : H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow G$ を parallel transport 写像, $\pi : G \rightarrow G/K$ を自然な射影とし, M を G/K 内の (埋め込まれた) コンパクト多様体とする。このとき, $(\pi \circ \phi)^{-1}(M)$ (これは正則化可能な proper Fredholm 部分多様体になる ([HLO, Lemma 5.2] 参照)) を初期データにもつ平均曲率流は短時間で一意的存在する。

§5. 定理 A および B の証明

この節において、序節で述べた定理 A および B を証明する。

M をコンパクト型対称空間 G/K 内の等焦部分多様体, $\pi : G \rightarrow G/K$ を自然な射影, $\phi : H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow G$ を parallel transport 写像とし, $\tilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M)$ とする。また, $\tilde{C} (\subset T_{u_0}^\perp \tilde{M})$ を \tilde{M} の点 u_0 における Coxeter 群の u_0 を含む基本領域とする。 $x_0 := (\pi \circ \phi)(u_0)$ とおく。 \tilde{M} の各平行部分多様体は $u_0 + \tilde{C} (\subset H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$ と 1 点で交わり, M の各平行部分多様体は $C := \exp^\perp(\tilde{C})$ と 1 点で交わる。ここで, \exp^\perp は M の法指数写像を表し, $T_{u_0}^\perp \tilde{M}$ と $T_{x_0}^\perp M$ の同一視の下, $\tilde{C} \subset T_{x_0}^\perp M$ とみなす。 $w \in \tilde{C}$ をとり, \tilde{w} を $\tilde{w}_{x_0} = w$ を満たす M の平行法ベクトル場とし, \tilde{w} を $\tilde{w}_{u_0} = w$ となる \tilde{M} の平行ベクトル場とする。 \tilde{w} は \hat{w} の $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ への水平リフトになる。 $\eta_{\tilde{w}} : M \rightarrow G/K$ を \hat{w} に対する end-point 写像, (つまり, $\eta_{\tilde{w}}(x) = \exp^\perp(\tilde{w}_x)$ ($x \in M$)), $\eta_{\tilde{w}} : \tilde{M} \rightarrow H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ を \tilde{w} に対する end-point 写像 (つまり, $\eta_{\tilde{w}}(u) = u + \tilde{w}_u$ ($u \in \tilde{M}$)) とし, $M^w := \eta_{\tilde{w}}(M)$, $\tilde{M}^w := \eta_{\tilde{w}}(\tilde{M})$ とおく。これらは、各々、 M , \tilde{M} の平行部分多様体であり, $\tilde{M}^w = (\pi \circ \phi)^{-1}(M^w)$ が成り立つ。 H^w を M^w の平均曲率ベクトルとし, \tilde{H}^w を \tilde{M}^w の正則化された平均曲率ベクトルとする。また, M_t^w を M^w を初期データにもつ平均曲率流とし, \tilde{M}_t^w を \tilde{M}^w を初期データにもつ平均曲率流とする。 \tilde{C} 上のベクトル場 X を次式によって定義する：

$$X_w := (\tilde{H}^w)_{u_0+w} \quad (w \in \tilde{C})$$

$$(\tilde{w} : \tilde{M} \text{ の平行ベクトル場 s.t. } \tilde{w}_{u_0} = w)$$

$\{\psi_t\}$ を X の局所 1 パラメーター変換群とし、各 $w \in \tilde{C}$ に対し、 w を発する X の極大な積分曲線を $\xi_w : [0, T_w) \rightarrow \tilde{C}$ (つまり, $\xi_w(t) = \psi_t(w)$) とする。このとき、次の事実が成り立つ。

補題 5.1. $\widehat{\xi_w(t)}$ を M の平行法ベクトル場で $\widehat{\xi_w(t)}_{x_0} = \xi_w(t)$ となるようなものとし, $\widehat{\xi_w(t)}$ を \tilde{M} の平行法ベクトル場で $\widehat{\xi_w(t)}_{u_0} = \xi_w(t)$ となるようなものとする。また, $\tilde{f} : \tilde{M} \times [0, T_w) \rightarrow H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ を $\tilde{f}(u, t) := \eta_{\widehat{\xi_w(t)}}(u)$ ($(u, t) \in \tilde{M} \times [0, T_w)$) によって定義し, $\hat{f} : M \times [0, T_w) \rightarrow G/K$ を $\hat{f}(x, t) := \eta_{\widehat{\xi_w(t)}}(x)$ ($(x, t) \in M \times [0, T_w)$) によって定義する。このとき、次の主張が (i) および (ii) が成り立つ。

- (i) \tilde{f} (つまり, $\tilde{M}^{\xi_w(t)}$ ($0 \leq t < T_w$)) は, \tilde{M}^w を初期データにもつ平均曲率流である。
- (ii) \hat{f} (つまり, $M^{\xi_w(t)}$ ($0 \leq t < T_w$)) は, M^w を初期データにもつ平均曲率流である。

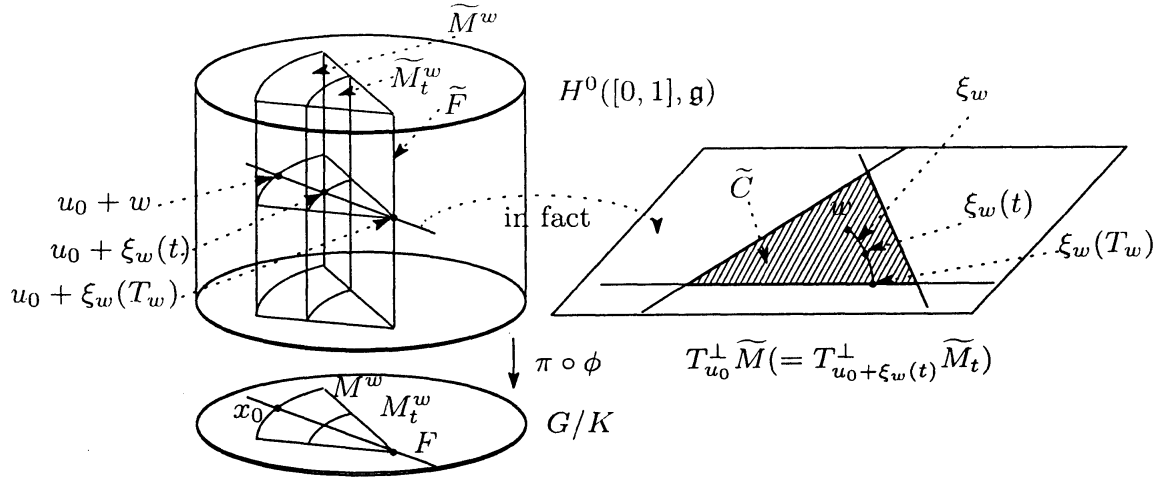


図 6

証明 $t_0 \in [0, T_w]$ とする。 $\tilde{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(\cdot, t_0)})$ と $\tilde{H}^{\xi_w(t_0)}$ は、共に $\tilde{M}^{\xi_w(t_0)}$ の平行法ベクトル場であることが示され、また、 $\tilde{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(u_0, t_0)}) = (\tilde{H}^{\xi_w(t_0)})_{u_0 + \xi_w(t_0)}$ が示される。よって、 $\tilde{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(\cdot, t_0)})$ と $\tilde{H}^{\xi_w(t_0)}$ は一致する。それゆえ、 \tilde{f} は \tilde{M}^w を初期データにもつ平均曲率流である。また、 $\tilde{M}^{\xi_w(t)} = (\pi \circ \phi)^{-1}(M^{\xi_w(t)})$ から $\tilde{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(u, t)}) = \hat{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(\pi \circ \phi)(u), t})^L$ および $\tilde{H}^{\xi_w(t_0)} = (H^{\xi_w(t_0)})^L$ が示される。よって、 $\hat{f}_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(\cdot, t_0)}) = H^{\xi_w(t_0)}$ 、つまり、 \hat{f} は M^w を初期データにもつ平均曲率流である。 \diamond

\tilde{M} の主曲率の全体を Λ とする。 \tilde{M} の u_0 におけるフォーカル集合は、 $T_{u_0}^\perp \tilde{M}$ 内の有限個の、等間隔に並んだ超平面族 $\mathcal{D}_a = \{l_{aj} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ ($a = 1, \dots, \bar{r}$) からなる。それゆえ、 Λ は、次のような形で与えられる：

$$\Lambda = \bigcup_{a=1}^{\bar{r}} \left\{ \frac{\lambda_a}{1 + b_a j} \mid j \in \mathbb{Z} \right\}$$

($\lambda_a : (T^\perp \tilde{M})^*$ の平行切断, $b_a : 1$ より大きい正の定数)

ここで、 $(\lambda_a)^{-1}(1 + b_a j) = l_{aj}$ ($j \in \mathbb{Z}$, $a = 1, \dots, \bar{r}$) であることを注意しておく。簡単のため、 $\lambda_{aj} = \frac{\lambda_a}{1 + b_a j}$ とおく。 \mathbf{n}_{aj} , E_{aj} を各々 λ_{aj} に対応する curvature normal, 主曲率分布とする。 $\lambda_{a, 2j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) らは、同じ重複度 (これを m_a^c と表す) もち、 $\lambda_{a, 2j+1}$ ($j \in \mathbb{Z}$) らも同じ重複度 (これを m_a^o と表す) をもつ。 \tilde{A}^w を \tilde{M}^w の形作用素とする。このとき、各 $v \in T_u^\perp \tilde{M}$ ($u : M$ の任意の点) に対し、

$$\tilde{A}_v^w|_{\eta_{\tilde{M}^w}((E_{aj})_u)} = \frac{(\lambda_{aj})_u(v)}{1 - (\lambda_{aj})_u(\tilde{w}_u)} \text{id}$$

それゆえ、 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\theta + 2j\pi} = \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta}$ を用いて

$$\text{Tr}_r \tilde{A}_v^w = \sum_{a=1}^{\bar{r}} \left(m_a^c \cot\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - \lambda_a(\tilde{w}_u))\right) - m_a^o \tan\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - \lambda_a(\tilde{w}_u))\right) \right) \frac{\pi}{2b_a} \lambda_a(v),$$

が示される。よって、 \widetilde{M}^w の正則化された平均曲率ベクトル \widetilde{H}^w について次が成り立つ。

補題 5.2. \widetilde{H}^w は次式によって与えられる：

$$\widetilde{H}^w = \sum_{a=1}^{\bar{r}} \left(m_a^e \cot\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(w))\right) - m_a^o \tan\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(w))\right) \right) \frac{\pi}{2b_a} \mathbf{n}_{a,0}$$

簡単のため、 $\mathbf{n}_a := \mathbf{n}_{a,0}$ とおく。これらの補題を用いて定理 A を証明することにする。

定理 A の証明 補題 5.2 より、前述の \widetilde{C} 上のベクトル場 X は次のように記述される：

$$(5.1) \quad X_w = \sum_{a=1}^{\bar{r}} \left(m_a^e \cot\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(\widetilde{w}))\right) - m_a^o \tan\left(\frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(\widetilde{w}))\right) \right) \frac{\pi}{2b_a} (\mathbf{n}_a)_{u_0} \\ (w \in \widetilde{C})$$

\widetilde{C} 上の関数 ρ を次式によって定義する：

$$\rho \in C^\infty(\widetilde{C}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \rho(w) := - \sum_{a=1}^{\bar{r}} \left(m_a^e \log \sin \frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(w)) \right. \\ \left. + m_a^o \log \cos \frac{\pi}{b_a}(1 - (\lambda_a)_{u_0}(w)) \right) \quad (w \in \widetilde{C})$$

このとき、 $\text{grad } \rho = X$ および ρ が下に凸であることが容易に示される。また、 $\rho(w) \rightarrow \infty$ ($w \rightarrow \partial\widetilde{C}$) が示される。それゆえ、 ρ および X は図 7 のようになる。したがって、 ρ がただ 1 つの極小点 (これを w_0 と表す) をもち、 $X_{w_0} = 0$ となり、 w_0 以外の点を発する X のフローが有限時間で $\partial\widetilde{C}$ 上のある点へ収束することがわかる。 M は極小でないので、 $0 \neq w_0$ であり、 0 を発する X のフロー $\xi_0(t)$ は有限時間 (これを T と表す) で $\partial\widetilde{C}$ 上のある点 (これを w_1 と表す) へ収束することがわかる。補題 5.1 により $M_t = M^{\xi_0(t)}$ なので、平均曲率流 M_t は M のフォーカル部分多様体 $F := M^{w_1}$ に崩壊する。このように (i) の前半部が示される。また、 X が図 7 のようになっているので、 $\partial\widetilde{C}$ 上の任意の点 w に対し、 \widetilde{C} の点 w' で w' を発する X のフローが点 w に収束するようなものが存在することがわかる。この事実から、(ii) が示される。

次に、(i) の後半部を示すことにする。 M が既約で $\text{codim } M > 1$ とし、 M から F へのフォーカル写像が spherical fibration であるとする。 $\widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M)$, $\widetilde{M}_t := (\pi \circ \phi)^{-1}(M_t)$, $\widetilde{F} := (\pi \circ \phi)^{-1}(F)$ とする。 M から F へのフォーカル写像が spherical fibration なので、 \widetilde{F} は $\partial\widetilde{C}$ (これは単体複体) のある最高次元の単体を $\tilde{\sigma}$ として $u_0 + (\tilde{\sigma})^\circ$ を通る。 $\tilde{\sigma} \subset (\lambda_{a_0})_{u_0}^{-1}(1)$ となる $a_0 \in \{1, \dots, \bar{r}\}$ をとる。このとき、 $\widetilde{M}_t = \widetilde{M}^{\xi_0(t)}$ 、つまり、 \widetilde{M}_t は \widetilde{M} に対する \widetilde{M} の平行部分多様体であるので、 \widetilde{M}_t の形作用素 \widetilde{A}_v^t の 0 以外のスペクトラム $\text{Spec } \widetilde{A}_v^t \setminus \{0\}$ は次式によ

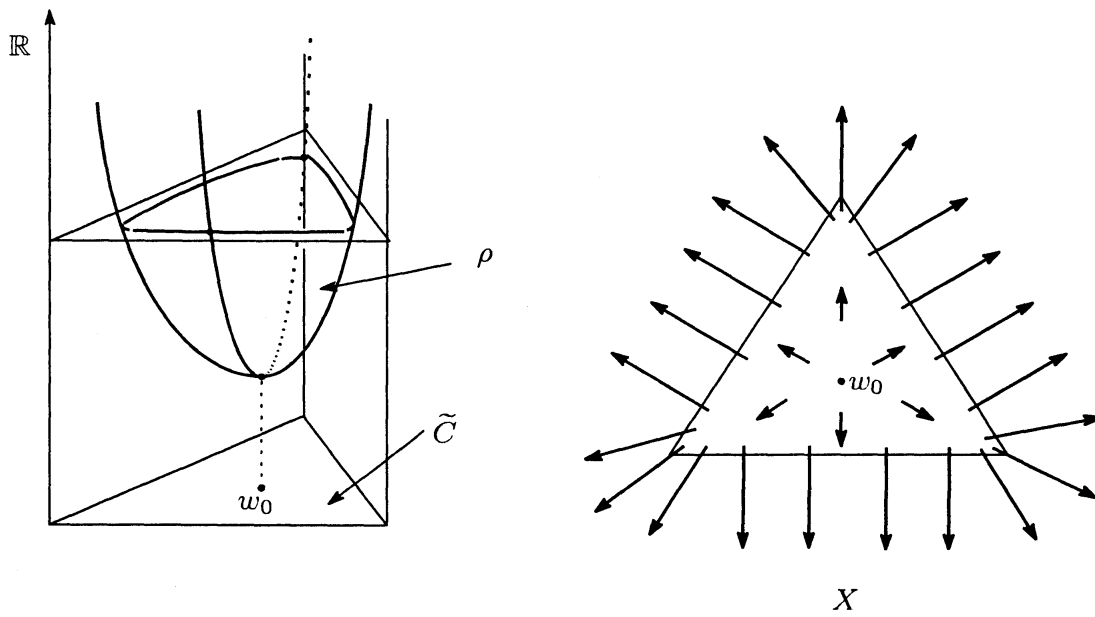


図 7

て与えられる：

$$\text{Spec } \tilde{A}_v^t \setminus \{0\} = \left\{ \frac{(\lambda_{aj})_{u_0}(v)}{1 - (\lambda_{aj})_{u_0}(\xi_0(t))} \mid a = 1, \dots, \bar{r}, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\lim_{t \rightarrow T_0-0} (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi_0(t)) = 1$ かつ $\lim_{t \rightarrow T_0-0} (\lambda_a)_{u_0}(\xi_0(t)) < 1$ ($a \neq a_0$) なので、次式を得る：

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow T_0-0} \|\tilde{A}_v^t\|_\infty^2 (T_0 - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow T_0-0} \frac{(\lambda_{a_0})_{u_0}(v)^2}{(1 - (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi_0(t)))^2} (T_0 - t) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_{a_0})_{u_0}(v)^2 \lim_{t \rightarrow T_0-0} \frac{1}{(1 - (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi_0(t))) (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi'_0(t))} \end{aligned}$$

一方、 $\xi'_0(t) = (\tilde{H}^{\xi_0(t)})_{u_0 + \xi_0(t)}$ および補題 5.2 から次式を得る：

$$\lim_{t \rightarrow T_0-0} (1 - (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi_0(t))) (\lambda_{a_0})_{u_0}(\xi'_0(t)) = m_{a_0}^e \|(\mathbf{n}_{a_0})_{u_0}\|^2$$

したがって、次式を得る：

$$(5.1) \quad \lim_{t \rightarrow T_0-0} \max_{v \in S_{u_0 + \xi_0(t)}^\perp} \|\tilde{A}_v^t\|_\infty^2 (T_0 - t) = \frac{1}{2m_{a_0}^e}$$

このように、 \tilde{M}_t ($0 \leq t < T_0$) は type I singularity をもつ。 $\bar{v}_t := (\pi \circ \phi)_{*u_0 + \xi_{u_1 - u_0}(t)}(v)$ とし、 $\{\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t\}$ ($\lambda_1^t \leq \dots \leq \lambda_n^t$) を M_t の形作用素 $A_{\bar{v}_t}^t$ のスペクトラム、 $\{\mu_1^t, \dots, \mu_n^t\}$ ($0 \leq \mu_1^t \leq \dots \leq \mu_n^t$) を $R(\cdot, \bar{v}_t)\bar{v}_t$ ($R : G/K$ の曲率テンソル) のスペクトラムとする。ここで、

n は M の次元を表す。仮定により、 M は余次元 2 以上の既約な等焦部分多様体であることから、 M が curvature-adapted (つまり、 $R(\cdot, \bar{v}_t)\bar{v}_t$ は M の接空間を保ち、 $[R(\cdot, \bar{v}_t)\bar{v}_t, A_{\bar{v}_t}^t] = 0$) であることが示される。この事実から $\text{Spec } \tilde{A}_{\bar{v}_t}^t$ を明確に記述することができ、その記述を用いて $\lim_{t \rightarrow T_0-0} \|\tilde{A}_{\bar{v}_t}^t\|_\infty^2(T_0-t) = \lim_{t \rightarrow T_0-0} \|A_{\bar{v}_t}^t\|_\infty^2(T_0-t)$ を得る。それゆえ、(5.1) から M_t ($0 \leq t < T_0$) は type I singularity をもつことが示される。 \diamond

次に、定理 B の証明の概略を述べる。

定理 B の証明の概略 $\tilde{\sigma}$ を $\partial \tilde{C}$ の 1 次元以上の単体とし、 $w \in (\tilde{\sigma})^\circ$ を通る \tilde{M} のフォーカル部分多様体を \tilde{F}^w とし、 \tilde{F}^w の正則化された平均曲率を \tilde{H}^w とする。 $(\tilde{H}^w)_{u_0+w}$ は $\tilde{\sigma}$ に接することが示される。それゆえ、 $(\tilde{\sigma})^\circ$ 上の接ベクトル場 $X^{\tilde{\sigma}}$ が $X_w^{\tilde{\sigma}} := (\tilde{H}^w)_{u_0+w}$ ($w \in (\tilde{\sigma})^\circ$) によって定義される。 $X^{\tilde{\sigma}}$ の具体的記述を与え、定理 A の (i) の前半部と (ii) の証明を模倣して、(i) の前半部と (ii) を証明することができる。(i) の後半部は定理 A の (i) の後半部の証明を模倣して示される。 \diamond

§6. Hermann 作用の軌道を初期データにもつ平均曲率流

G/K をコンパクト型対称空間とし、 θ を G の対合で $(\text{Fix } \theta)_0 \subset K \subset \text{Fix } \theta$ を満たすものとする。 H を G の対称部分群 (つまり、 $\exists \tau : G$ の対合 s.t. $(\text{Fix } \tau)_0 \subset H \subset \text{Fix } \tau$) とする。 H の G/K への (自然な) 作用は Hermann 作用とよばれ、その主軌道は等焦部分多様体になる。ここで、3つの例外を除いて、 $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta$ であると仮定してよいことを注意しておく ([Co] 参照)。以下、 $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta$ であるとする。 θ, τ から導かれる \mathfrak{g} の対合も同じ記号 θ, τ で表すことにする。 $\mathfrak{f} := \text{Ker}(\theta - \text{id})$, $\mathfrak{p} := \text{Ker}(\theta + \text{id})$, $\mathfrak{h} := \text{Ker}(\tau - \text{id})$, $\mathfrak{q} := \text{Ker}(\tau + \text{id})$ とおく。 \mathfrak{p} は $T_{eK}(G/K)$ と同一視される。 $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta$ なので、 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ が成り立つ。ここで、 $T_{eK}(H(eK)) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$, $T_{eK}^\perp(H(eK)) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ であることを注意しておく。 $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大アーベル部分空間 \mathfrak{b} をとり、 $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+} \mathfrak{p}_\beta$ を \mathfrak{b} に関するルート空間分解とする。ここで、 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$ は \mathfrak{b} の \mathfrak{p} における centralizer を表し、 $\mathfrak{p}_\beta := \{X \in \mathfrak{p} \mid \text{ad}(\mathfrak{b})^2(X) = -\beta(\mathfrak{b})^2 X \ (\forall \mathfrak{b} \in \mathfrak{b})\}$ ($\beta \in \mathfrak{b}^* \setminus \{0\}$), Δ'_+ はルート系 $\Delta' := \{\beta \in \mathfrak{b}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{p}_\beta \neq \{0\}\}$ の (\mathfrak{b} のある辞書式順序に関する) 正ルート系を表す。また、 $\Delta'^V_+ := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q} \neq \{0\}\}$, $\Delta'^H_+ := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}\}$ とする。 $\tilde{C}(\subset \mathfrak{b})$ を次式によって定義する：

$$\tilde{C} := \{\mathfrak{b} \in \mathfrak{b} \mid 0 < \beta(\mathfrak{b}) < \pi \ (\forall \beta \in \Delta'^V_+ \setminus \Delta'^H_+), -\frac{\pi}{2} < \beta(\mathfrak{b}) < \frac{\pi}{2} \ (\forall \beta \in \Delta'^H_+ \setminus \Delta'^V_+), \\ 0 < \beta(\mathfrak{b}) < \frac{\pi}{2} \ (\forall \beta \in \Delta'^V_+ \cap \Delta'^H_+)\}$$

$C := \text{Exp}(\tilde{C})$ とおく。ここで、 Exp は G/K の eK における指数写像を表す。 H 作用の各主軌道は C と 1 点で交わり、各特異軌道は ∂C と 1 点で交わり、 \tilde{C} は主軌道の Coxeter 群の基本領域である。 $P(G, H \times K) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in H \times K\}$ とおく。ここで、 $H^1([0, 1], G)$ は $([0, 1]$ を定義域とする) G における H^1 -path 全体からなるヒルベルトリー群を表す。 $P(G, H \times K)$ は、自明なバンドル $[0, 1] \times G$ の H^0 接続全体からなるヒル

ベルト空間 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ にゲージ作用として作用する。 $P(G, H \times K)$ 作用の各軌道は、 H 軌道の $\pi \circ \phi$ による原像であり、 $P(G, H \times K)$ 作用の各主軌道は \tilde{C} と 1 点で交わり、各特異軌道は $\partial\tilde{C}$ と 1 点で交わる。ここで、 ϕ は G に対する parallel transport 写像を表し、 π は G から G/K への自然な射影を表し、 \tilde{C} は次のように $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の部分集合とみなす：

$$\tilde{C} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \underset{\text{ident.}}{=} T_{eK}(G/K) \underset{\text{ident.}}{=} (T_{eK}(G/K))_{\hat{0}}^L \underset{\text{the hor. lift to } \hat{0}}{\subset} T_{\hat{0}}H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \underset{\text{ident.}}{=} H^0([0, 1], \mathfrak{g})$$

$Z \in \tilde{C}$ をとり、 $M := H(\text{Exp } Z)$, $\tilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) (= P(G, H \times K) \cdot Z)$ とおく。ここで、 $\text{Exp } Z = (\pi \circ \phi)(Z)$ であることを注意しておく。 \tilde{M} の主曲率の全体 Λ は次式によって与えられる：

$$\Lambda = \left\{ \frac{-\beta \circ \exp_G(Z)^{-1}}{\beta(Z) + j\pi} \mid \beta \in \Delta'_+, j \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\beta \circ \exp_G(Z)^{-1}}{\beta(Z) + (j + \frac{1}{2})\pi} \mid \beta \in \Delta'^H_+, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

ここで、 \exp_G は G の指数写像を表す。この式と (5.1) を用いて、前節で定義したベクトル場 X を具体的に記述することができる。以下、階数 2 の既約なコンパクト型対称空間 G/K 上の余等質 2 の Hermann 作用 $H \curvearrowright G/K$ をリストアップし (表 1 参照)、それらに対する Δ'_+, Δ'^H_+ を与え (表 2 参照)、また、 X の具体的記述を与える (表 3 参照)。ここで、表 1 における Hermann 作用達のうちいくつかは互いに軌道同値であることを注意しておく。表 1 において、 $H^* \curvearrowright G^*/K$ は $H \curvearrowright G/K$ の双対作用を表し、 $L^*/H \cap K$ は $L/H \cap K$ ($L := \text{Fix}(\theta \circ \tau)$) の双対を表す。表 2 において、 $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ は、 (a_2) 型のルート系のある辞書式順序に関する正ルート系を表し、 $\alpha = (2, 0), \beta = (-1, \sqrt{3})$ とする。また、 $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$ は (b_2) ($= (c_2)$) 型のルート系のある辞書式順序に関する正ルート系を表し、 $\alpha = (1, 0), \beta = (-1, 1)$ とする。また、 $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta\}$ は、 (g_2) 型のルート系のある辞書式順序に関する正ルート系を表し、 $\alpha = (2\sqrt{3}, 0), \beta = (-\sqrt{3}, 1)$ とする。表 1 ~ 3 において、 ρ_i ($i = 1, \dots, 16$) は G の自己同型写像を表し、 $(\cdot)^2$ は、リー群 (\cdot) の直積リー群 $(\cdot) \times (\cdot)$ を表す。表 2 において、 $\alpha_{(m)}$ 等は、 α の重複度が m に等しいことを表す。

| $H \curvearrowright G/K$ | $H^* \curvearrowright G^*/K$ | $L^*/H \cap K$ |
|---|--|---|
| $\rho_1(SO(3)) \curvearrowright SU(3)/SO(3)$ | $SO_0(1, 2) \curvearrowright SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$ | $(SL(2, \mathbb{R})/SO(2)) \times \mathbb{R}$ |
| $SO(6) \curvearrowright SU(6)/Sp(3)$ | $SO^*(6) \curvearrowright SU^*(6)/Sp(3)$ | $SL(3, \mathbb{C})/SU(3)$ |
| $\rho_2(Sp(3)) \curvearrowright SU(6)/Sp(3)$ | $Sp(1, 2) \curvearrowright SU^*(6)/Sp(3)$ | $(SU^*(4)/Sp(2)) \times U(1)$ |
| $SO(q+2) \curvearrowright$ $SU(q+2)/S(U(2) \times U(q))$ | $SO_0(2, q) \curvearrowright$ $SU(2, q)/S(U(2) \times U(q))$ | $SO_0(2, q)/SO(2) \times SO(q)$ |
| $S(U(j+1) \times U(q-j+1)) \curvearrowright$ $SU(q+2)/S(U(2) \times U(q))$ | $S(U(1, j) \times U(1, q-j)) \curvearrowright$ $SU(2, q)/S(U(2) \times U(q))$ | $(SU(1, j)/S(U(1) \times U(j))) \times$ $(SU(1, q-j)/S(U(1) \times U(q-j)))$ |
| $SO(j+1) \times SO(q-j+1) \curvearrowright$ $SO(q+2)/SO(2) \times SO(q)$ | $SO(1, j) \times SO(1, q-j) \curvearrowright$ $SO(2, q)/SO(2) \times SO(q)$ | $(SO_0(1, j)/SO(j)) \times$ $(SO_0(1, q-j)/SO(q-j))$ |
| $SO(4) \times SO(4) \curvearrowright$ $SO(8)/U(4)$ | $SO^*(4) \times SO^*(4) \curvearrowright$ $SO^*(8)/U(4)$ | $SU(2, 2)/S(U(2) \times U(2))$ |
| $\rho_3(SO(4) \times SO(4)) \curvearrowright$ $SO(8)/U(4)$ | $SO(4, \mathbb{C}) \curvearrowright SO^*(8)/U(4)$ | $SO(4, \mathbb{C})/SO(4)$ |
| $\rho_4(U(4)) \curvearrowright SO(8)/U(4)$ | $U(2, 2) \curvearrowright SO^*(8)/U(4)$ | $(SO^*(4)/U(2)) \times (SO^*(4)/U(2))$ |
| $SO(4) \times SO(6) \curvearrowright$ $SO(10)/U(5)$ | $SO^*(4) \times SO^*(6) \curvearrowright$ $SO^*(10)/U(5)$ | $SU(2, 3)/S(U(2) \times U(3))$ |
| $SO(5) \times SO(5) \curvearrowright$ $SO(10)/U(5)$ | $SO^*(5, \mathbb{C}) \curvearrowright SO^*(10)/U(5)$ | $SO(5, \mathbb{C})/SO(5)$ |
| $\rho_5(U(5)) \curvearrowright SO(10)/U(5)$ | $U(2, 3) \curvearrowright SO^*(10)/U(5)$ | $(SO^*(4)/U(2)) \times (SO^*(6)/U(3))$ |
| $SO(2)^2 \times SO(3)^2 \curvearrowright$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $SO(2, \mathbb{C}) \times SO(3, \mathbb{C}) \curvearrowright$ $SO(5, \mathbb{C})/SO(5)$ | $SO_0(2, 3)/SO(2) \times SO(3)$ |
| $\rho_6(SO(5)) \curvearrowright$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $SO_0(2, 3) \curvearrowright SO(5, \mathbb{C})/SO(5)$ | $(SO(2, \mathbb{C})/SO(2))$ $\times (SO(3, \mathbb{C})/SO(3))$ |
| $\rho_7(U(2)) \curvearrowright Sp(2)/U(2)$ | $U(1, 1) \curvearrowright Sp(2, \mathbb{R})/U(2)$ | $(Sp(1, \mathbb{R})/U(1))$ $\times (Sp(1, \mathbb{R})/U(1))$ |
| $SU(q+2) \curvearrowright$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ | $SU(2, q) \curvearrowright$ $Sp(2, q)/Sp(2) \times Sp(q)$ | $SU(2, q)/S(U(2) \times U(q))$ |

表 1

| $H \curvearrowright G/K$ | $H^* \curvearrowright G^*/K$ | $L^*/H \cap K$ |
|--|---|---|
| $U(4) \curvearrowright$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $U^*(4) \curvearrowright$ $Sp(2, 2)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $Sp(2, \mathbb{C})/Sp(2)$ |
| $Sp(j+1) \times Sp(q-j+1) \curvearrowright$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ | $Sp(1, j) \times Sp(1, q-j) \curvearrowright$ $Sp(2, q)/Sp(2) \times Sp(q)$ | $(Sp(1, j)/Sp(1) \times Sp(j)) \times$ $(Sp(1, q-j)/Sp(1) \times Sp(q-j))$ |
| $SU(2)^2 \cdot SO(2)^2 \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $SL(2, \mathbb{C}) \cdot SO(2, \mathbb{C}) \curvearrowright$ $Sp(2, \mathbb{C})/Sp(2)$ | $Sp(2, \mathbb{R})/U(2)$ |
| $\rho_8(Sp(2)) \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $Sp(2, \mathbb{R}) \curvearrowright Sp(2, \mathbb{C})/Sp(2)$ | $(SL(2, \mathbb{C})/SU(2))$ $\times (SO(2, \mathbb{C})/SO(2))$ |
| $\rho_9(Sp(2)) \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $Sp(1, 1) \curvearrowright Sp(2, \mathbb{C})/Sp(2)$ | $(Sp(1, \mathbb{C})/Sp(1))$ $\times (Sp(1, \mathbb{C})/Sp(1))$ |
| $Sp(4) \curvearrowright E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $Sp(2, 2) \curvearrowright E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$ | $Sp(2, 2)/Sp(2) \times Sp(2)$ |
| $SU(6) \cdot SU(2) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SU(2, 4) \cdot SU(2) \curvearrowright$ $E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SU(2, 4)/S(U(2) \times U(4))$ |
| $\rho_{10}(SU(6) \cdot SU(2)) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SU(1, 5) \cdot SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright$ $E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SO^*(10)/U(5)$ |
| $\rho_{11}(Spin(10) \cdot U(1)) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SO^*(10) \cdot U(1) \curvearrowright$ $E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$ | $(SU(1, 5)/S(U(1) \times U(5)))$ $\times (SL(2, \mathbb{R})/SO(2))$ |
| $\rho_{12}(Spin(10) \cdot U(1)) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SO_0(2, 8) \cdot U(1) \curvearrowright$ $E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$ | $SO_0(2, 8)/SO(2) \times SO(8)$ |
| $Sp(4) \curvearrowright E_6/F_4$ | $Sp(1, 3) \curvearrowright E_6^{-26}/F_4$ | $SU^*(6)/Sp(3)$ |
| $\rho_{13}(F_4) \curvearrowright E_6/F_4$ | $F_4^{-20} \curvearrowright E_6^{-26}/F_4$ | $(SO_0(1, 9)/SO(9)) \times U(1)$ |
| $\rho_{14}(SO(4)) \curvearrowright G_2/SO(4)$ | $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright G_2^2/SO(4)$ | $SO(4)/SO(2) \times SO(2)$ |
| $\rho_{15}(SO(4)) \curvearrowright G_2/SO(4)$ | $\rho_{15}^*(SO(4)) \curvearrowright G_2^2/SO(4)$ | $(SL(2, \mathbb{R})/SO(2))$ $\times (SL(2, \mathbb{R})/SO(2))$ |
| $\rho_{16}(G_2) \curvearrowright (G_2 \times G_2)/G_2$ | $G_2^2 \curvearrowright G_2^{\mathbb{C}}/G_2$ | $(SL(2, \mathbb{C})/SU(2))$ $\times (SL(2, \mathbb{C})/SU(2))$ |
| $SU(2)^4 \curvearrowright (G_2 \times G_2)/G_2$ | $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \curvearrowright G_2^{\mathbb{C}}/G_2$ | $G_2^2/SO(4)$ |

表 1(続)

| $H \hookrightarrow G/K$ | $\Delta_+ = \Delta'_+$ | Δ'^V_+ | Δ'^H_+ |
|---|--|---|---|
| $\rho_5(U(5)) \hookrightarrow SO(10)/U(5)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4) & (4) & (4) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta, 2\alpha, 2\alpha + 2\beta \right\}$ $(4) \quad (1) \quad (1)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & 2\alpha, & 2\alpha + 2\beta \\ (4) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta, & \alpha + \beta, & 2\alpha + \beta \\ (4) & (4) & (4) \end{smallmatrix} \right\}$ |
| $SO(2)^2 \times SO(3)^2 \hookrightarrow$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (1) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (1) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) |
| $\rho_6(SO(5)) \hookrightarrow$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ (2) \end{smallmatrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta, & \alpha + \beta, & 2\alpha + \beta \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right\}$ |
| $\rho_7(U(2)) \hookrightarrow Sp(2)/U(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (1) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \alpha + \beta \\ (1) & (1) \end{smallmatrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta, & 2\alpha + \beta \\ (1) & (1) \end{smallmatrix} \right\}$ |
| $SU(q+2) \hookrightarrow$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ $(q > 2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4q-8) & (4) & (4q-8) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta, 2\alpha, 2\alpha + 2\beta \right\}$ $(4) \quad (3) \quad (3)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2q-4) & (2) & (2q-4) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta, 2\alpha, 2\alpha + 2\beta \right\}$ $(2) \quad (1) \quad (1)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2q-4) & (2) & (2q-4) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta, 2\alpha, 2\alpha + 2\beta \right\}$ $(2) \quad (2) \quad (2)$ |
| $SU(4) \hookrightarrow$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4) & (3) & (3) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (4) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2) & (1) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2) & (2) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (3) |
| $U(4) \hookrightarrow$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4) & (3) & (3) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (4) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (2) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) |
| $Sp(j+1) \times Sp(q-j+1) \hookrightarrow$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ $(q > 2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4q-8) & (4) & (4q-8) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta, 2\alpha, 2\alpha + 2\beta \right\}$ $(4) \quad (3) \quad (3)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & 2\alpha, & \alpha + \beta \\ (2j-4) & (3) & (4q-4j-4) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + 2\beta \right\}$ (3) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta \\ (4q-4j-4) & (4) & (4j-4) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (4) |
| $Sp(2) \times Sp(2) \hookrightarrow$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (4) & (3) & (3) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (4) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \alpha + \beta \\ (3) & (3) \end{smallmatrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & 2\alpha + \beta \\ (1) & (3) & (4) \end{smallmatrix} \right\}$ |
| $SU(2)^2 \cdot SO(2)^2 \hookrightarrow$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (1) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (1) & (1) & (1) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (1) |
| $\rho_8(Sp(2)) \hookrightarrow$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \beta, & \alpha + \beta, \\ (2) & (2) & (2) \end{smallmatrix} \right.$ $\left. 2\alpha + \beta \right\}$ (2) | $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha, & \alpha + \beta \\ (2) & (2) \end{smallmatrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta, & 2\alpha + \beta \\ (2) & (2) \end{smallmatrix} \right\}$ |

表 2(続)

[illegible]表 2(続²)

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|---|---|
| $\rho_1(SO(3)) \curvearrowright SU(3)/SO(3)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (\tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) - 2 \cot 2x_1 + \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2),$ $\sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) - \sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, x_2 < -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $SO(6) \curvearrowright SU(6)/Sp(3)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-4 \cot 2x_1 - 2 \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) - 2 \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2)$ $+ 4 \tan 2x_1 + 2 \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 2 \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $2\sqrt{3} \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) - 2\sqrt{3} \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2)$ $- 2\sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 2\sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > \frac{1}{\sqrt{3}}x_1, x_2 < -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $\rho_2(Sp(3)) \curvearrowright SU(6)/Sp(3)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-8 \cot 2x_1 + 4 \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 4 \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $4\sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) - 4\sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, x_2 < -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $SO(q+2) \curvearrowright$ $SU(q+2)/S(U(2) \times U(q))$ $(q > 2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-(q-2) \cot x_1 + \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $+(q-2) \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2) + 2 \tan 2x_1,$ $\cot(x_1 - x_2) - (q-2) \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- \tan(x_1 - x_2) + (q-2) \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2) + 2 \tan 2x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_2 < \frac{\pi}{4})$ |
| $SO(4) \curvearrowright$ $SU(4)/S(U(2) \times U(2))$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 + \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot x_2 - \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $S(U(j+1) \times U(q-j+1)) \curvearrowright$ $SU(q+2)/S(U(2) \times U(q))$ $(q > 2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2(j-1) \cot x_1 - 2 \cot 2x_1 + 2(q-j-1) \tan x_1$ $+ 2 \tan(x_1 - x_2) + 2 \tan(x_1 + x_2),$ $-2(q-j-1) \cot x_2 - 2 \cot 2x_2 - 2 \tan(x_1 - x_2)$ $+ 2(j-1) \tan x_2 + 2 \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $S(U(2) \times U(2)) \curvearrowright$ $SU(4)/S(U(2) \times U(2))$ $(\text{non-isotropy gr. act.})$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 + \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot x_2 - \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $SO(j+1) \times SO(q-j+1) \curvearrowright$ $SO(q+2)/SO(2) \times SO(q)$ $(q > 2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-(j-1) \cot x_1 + (q-j-1) \tan x_1$ $+ \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-(q-j-1) \cot x_2 - \tan(x_1 - x_2)$ $+ (j-1) \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |

表 3

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|---|--|
| $SO(4) \times SO(4) \curvearrowright$ $SO(8)/U(4)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2 \cot x_1 - \cot(x_1 - x_2)$ $-2 \cot(x_1 + x_2) + 2 \tan x_1,$ $\cot(x_1 - x_2) - 2 \cot x_2$ $-2 \cot(x_1 + x_2) + 2 \tan x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 < x_1, x_1 + x_2 < \pi)$ |
| $\rho_3(SO(4) \times SO(4)) \curvearrowright$ $SO(8)/U(4)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2 \cot x_1 + 2 \tan x_1$ $+ \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-2 \cot x_2 - \tan(x_1 - x_2)$ $+ 2 \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_4(U(4)) \curvearrowright SO(8)/U(4)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 + 3 \tan x_1$ $+ \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot x_2 - \tan(x_1 - x_2)$ $+ 3 \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $SO(4) \times SO(6) \curvearrowright$ $SO(10)/U(5)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-\cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $- \cot 2x_1 + \tan x_1$ $+ \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $\cot(x_1 - x_2) - \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- \cot 2x_2 - \tan(x_1 - x_2)$ $+ \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $SO(5) \times SO(5) \curvearrowright$ $SO(10)/U(5)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-\cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $+ \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2)$ $+ \tan(x_1 + x_2) + \tan 2x_1,$ $\cot(x_1 - x_2) - \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2$ $+ \tan(x_1 + x_2) + \tan 2x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1, x_2 < \frac{\pi}{4})$ |
| $\rho_5(U(5)) \curvearrowright SO(10)/U(5)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-2 \cot x_1 - \cot 2x_1$ $+ 2 \tan(x_1 - x_2) + 2 \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot 2x_2 - 2 \tan(x_1 - x_2)$ $+ 2 \tan(x_1 + x_2) + 2 \tan x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |

表 3(続)

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|--|--|
| $SO(2)^2 \times SO(3)^2 \curvearrowright$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $+ \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $\cot(x_1 - x_2) - \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_6(SO(5)) \curvearrowright$ $(SO(5) \times SO(5))/SO(5)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-\cot x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $- \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1 - \frac{\pi}{2}, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_7(U(2)) \curvearrowright Sp(2)/U(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $- \cot x_2 - \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $U(q+2) \curvearrowright$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ $(q > 2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-(2q-4)\cot x_1 - 2\cot(x_1 - x_2) - 2\cot(x_1 + x_2)$ $- 2\cot 2x_1 + (2q-4)\tan x_1 + 2\tan(x_1 - x_2)$ $+ 2\tan(x_1 + x_2) + 4\tan 2x_1,$ $2\cot(x_1 - x_2) - (2q-4)\cot x_2 - 2\cot(x_1 + x_2)$ $- 2\cot 2x_2 - 2\tan(x_1 - x_2) + (2q-4)\tan x_2$ $+ 2\tan(x_1 + x_2) + 4\tan 2x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_2 < \frac{\pi}{4})$ |
| $SU(4) \curvearrowright$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2\cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $2\tan x_1 + 2\tan(x_1 - x_2) + 3\tan(x_1 + x_2),$ $\cot(x_1 - x_2) - 2\cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- 2\tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + 3\tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $U(4) \curvearrowright$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2\cot x_1 - 2\cot(x_1 - x_2) - 2\cot(x_1 + x_2)$ $2\tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + 2\tan(x_1 + x_2),$ $2\cot(x_1 - x_2) - 2\cot x_2 - 2\cot(x_1 + x_2)$ $- \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + 2\tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $Sp(j+1) \times Sp(q-j+1) \curvearrowright$ $Sp(q+2)/Sp(2) \times Sp(q)$ $(q > 2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-4(j-1)\cot x_1 - 6\cot 2x_1$ $+ 4(q-j-1)\tan x_1 + 4\tan(x_1 - x_2) + 4\tan(x_1 + x_2),$ $- 4(q-j-1)\cot x_2 - 6\cot 2x_2 - 4\tan(x_1 - x_2)$ $+ 4(j-1)\tan x_2 + 4\tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |

表 3(続²)

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|--|--|
| $Sp(2) \times Sp(2) \curvearrowright$ $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-3 \cot x_1 + \tan x_1$ $+ 3 \tan(x_1 - x_2) + 4 \tan(x_1 + x_2),$ $-3 \cot x_2 - 3 \tan(x_1 - x_2) + 4 \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $SU(2)^2 \cdot SO(2)^2 \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-\cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $+ \tan x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $\cot(x_1 - x_2) - \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $- \tan(x_1 - x_2) + \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_8(Sp(2)) \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-\cot x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot x_2 - \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_9(Sp(2)) \curvearrowright$ $(Sp(2) \times Sp(2))/Sp(2)$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-\cot x_1 + \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $-\cot x_2 - \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $Sp(4) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-4 \cot x_1 - 3 \cot(x_1 - x_2) - 4 \cot(x_1 + x_2)$ $+ 4 \tan x_1 + 3 \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $3 \cot(x_1 - x_2) - 3 \cot x_2 - 4 \cot(x_1 + x_2)$ $- 3 \tan(x_1 - x_2) + 6 \tan x_2 + \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $SU(6) \cdot SU(2) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-4 \cot x_1 - 2 \cot(x_1 - x_2) - 2 \cot(x_1 + x_2)$ $- 2 \cot 2x_1 + 4 \tan x_1$ $+ 4 \tan(x_1 - x_2) + 3 \tan(x_1 + x_2),$ $2 \cot(x_1 - x_2) - 4 \cot x_2 - 2 \cot(x_1 + x_2)$ $- 2 \cot 2x_2 - 4 \tan(x_1 - x_2)$ $+ 5 \tan x_2 + 3 \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_{10}(SU(6) \cdot SU(2)) \curvearrowright$ $E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-4 \cot x_1 - 4 \cot(x_1 - x_2) - 4 \cot(x_1 + x_2)$ $- 2 \cot 2x_1 + 4 \tan x_1$ $+ 2 \tan(x_1 - x_2) + \tan(x_1 + x_2),$ $4 \cot(x_1 - x_2) - 4 \cot x_2 - 4 \cot(x_1 + x_2)$ $- 2 \cot 2x_2 - 2 \tan(x_1 - x_2) + 5 \tan x_2$ $+ \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > x_1, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |

表 3(続³)

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|---|--|
| $\rho_{11}(Spin(10) \cdot U(1)) \curvearrowright E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-8 \cot x_1 - 2 \cot 2x_1 + 6 \tan(x_1 - x_2) + 5 \tan(x_1 + x_2),$ $-2 \cot 2x_2 - 6 \tan(x_1 - x_2) + 9 \tan x_2 + 5 \tan(x_1 + x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_{12}(Spin(10) \cdot U(1)) \curvearrowright E_6/Spin(10) \cdot U(1)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-6 \cot x_1 - \cot(x_1 - x_2) - \cot(x_1 + x_2)$ $2 \tan x_1 + 5 \tan(x_1 - x_2) + 4 \tan(x_1 + x_2) + 2 \tan 2x_1,$ $\cot(x_1 - x_2) - 6 \cot x_2 - \cot(x_1 + x_2)$ $-5 \tan(x_1 - x_2) + 3 \tan x_2 + 4 \tan(x_1 + x_2) + 2 \tan 2x_2)$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 < \frac{\pi}{4}, x_2 > x_1)$ |
| $Sp(4) \curvearrowright E_6/F_4$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-8 \cot 2x_1 - 4 \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) - 4 \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2)$ $+ 8 \tan 2x_1 + 4 \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 4 \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $4\sqrt{3} \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) - 4\sqrt{3} \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2)$ $- 4\sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 4\sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : 0 < x_1 < \frac{\pi}{4}, \frac{x_1}{\sqrt{3}} < x_2 < \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, -\frac{x_1}{\sqrt{3}} < x_2 < -\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $\rho_{13}(F_4) \curvearrowright E_6/F_4$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-16 \cot 2x_1 + 8 \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 8 \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $-8\sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + 8\sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_1 - \sqrt{3}x_2 < \frac{\pi}{2}, x_1 + \sqrt{3}x_2 < \frac{\pi}{2})$ |
| $\rho_{14}(SO(4)) \curvearrowright G_2/SO(4)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2 \cot 2x_1 + 3 \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) + \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2)$ $+ \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + 3 \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $-2\sqrt{3} \cot 2\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3} \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) - \sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2)$ $+ \sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + \sqrt{3} \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, \sqrt{3}x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $\rho_{15}(SO(4)) \curvearrowright G_2/SO(4)$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2 \cot 2x_1 + 3 \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) + \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2)$ $+ \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + 3 \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2),$ $-2\sqrt{3} \cot 2\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3} \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) - \sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2)$ $+ \sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + \sqrt{3} \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2))$ $(\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, \sqrt{3}x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |

表 3(続⁴)

| $H \curvearrowright G/K$ | $X \quad (\tilde{C})$ |
|--|--|
| $\rho_{16}(G_2) \curvearrowright (G_2 \times G_2)/G_2$ | $X_{(x_1, x_2)} = 2(-2 \cot 2x_1 + 3 \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) + \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) \\ + \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + 3 \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2), \\ -2\sqrt{3} \cot 2\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3} \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) - \sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) \\ + \sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + \sqrt{3} \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2)) \\ (\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 > 0, \sqrt{3}x_1 + x_2 < \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ |
| $SU(2)^4 \curvearrowright (G_2 \times G_2)/G_2$ | $X_{(x_1, x_2)} = (-2 \cot 2x_1 - 3 \cot(3x_1 - \sqrt{3}x_2) - \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) \\ - \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2) - 3 \cot(3x_1 + \sqrt{3}x_2) + 2 \tan 2x_1 \\ + 3 \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) + \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) \\ + \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) + 3 \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2), \\ \sqrt{3} \cot(3x_1 - \sqrt{3}x_2) + \sqrt{3} \cot(x_1 - \sqrt{3}x_2) - \sqrt{3} \cot(x_1 + \sqrt{3}x_2) \\ - \sqrt{3} \cot(3x_1 + \sqrt{3}x_2) - 2\sqrt{3} \cot 2\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3} \tan(3x_1 - \sqrt{3}x_2) \\ - \sqrt{3} \tan(x_1 - \sqrt{3}x_2) + \sqrt{3} \tan(x_1 + \sqrt{3}x_2) \\ + \sqrt{3} \tan(3x_1 + \sqrt{3}x_2) + 2\sqrt{3} \tan 2\sqrt{3}x_2) \\ (\tilde{C} : x_1 > 0, x_2 < \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, x_2 > \sqrt{3}x_1)$ |

表 3(続⁵)

§7. 今後の問題

双曲空間内の (コンパクトとは限らない) 等径超曲面の一般概念として、非コンパクト型対称空間 G/K 内で複素等焦部分多様体、および、その中で比較的良好な複素フォーカル構造をもつものとしてプロパー複素等焦部分多様体という概念が定義される ([Koi2,3])。 G/K 上の Hermann 型作用 (G の対称部分群の作用) の主軌道はプロパー複素等焦部分多様体になることが示される ([Koi4])。

問題 プロパー複素等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流について定理 A, B に類似した事実は成り立つのか？

参考文献

- [BCO] J. Berndt, S. Console and C. Olmos, Submanifolds and holonomy, Research Notes in Mathematics 434, CHAPMAN & HALL/CRC Press, Boca Raton, London, New York Washington, 2003.
- [Ch] U. Christ, Homogeneity of equifocal submanifolds, J. Differential Geometry **62** (2002) 1-15.
- [Co] L. Conlon, Remarks on commuting involutions, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1969) 255-257.
- [GT] O. Goertsches and G. Thorbergsson, On the Geometry of the orbits of Hermann actions, Geom. Dedicata **129** (2007) 101-118.
- [He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press,

New York, 1978.

- [Ha] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982) 255-306.
- [Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, *J. Differential Geom.* **20** (1984) 237-266.
- [Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, *Invent. math.* **84** (1986) 463-480.
- [HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restriction theorem, *Integrable systems, geometry, and topology*, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [HPTT] E. Heintze, R.S. Palais, C.L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, *Geometry, topology and physics for Raoul Bott* (ed. S. T. Yau), Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology **4**, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995 pp214-245.
- [Kol] A. Kollross, A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2001) 571-612.
- [LT] X. Liu and C. L. Terng, The mean curvature flow for isoparametric submanifolds, *Duke Math. J.* **147** (2009) 157-179.
- [PT] R.S. Palais and C.L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry, *Lecture Notes in Math.* **1353**, Springer, Berlin, 1988.
- [T1] C.L. Terng, Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups, *J. Differential Geometry* **21** (1985) 79-107.
- [T2] C.L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, *J. Differential Geometry* **29** (1989) 9-47.
- [TT] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, *J. Differential Geometry* **42** (1995) 665-718.
- [Z] X. P. Zhu, Lectures on mean curvature flows, *Studies in Advanced Math.*, AMS/IP, 2002.
- [Koi1] N. Koike, On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space, *Japan. J. Math.* **28** (2002) 61-80.
- [Koi2] N. Koike, Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space, *Kyushu J. Math.* **58** (2004) 167-202.
- [Koi3] N. Koike, Complex equifocal submanifolds and infinite dimensional anti-Kaehlerian isoparametric submanifolds, *Tokyo J. Math.* **28** (2005) 201-247.
- [Koi4] N. Koike, Actions of Hermann type and proper complex equifocal submanifolds, *Osaka J. Math.* **42** (2005) 599-611.
- [Koi5] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, arXiv:math.DG/0908.3086v2.